

# PRÁCTICA ESPACIADA E INTERCALADA: ¿POR QUÉ ES TAN DIFÍCIL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS?

**CARLOS DE CASTRO** UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID



## LAS PRUEBAS DE LA EDUCACIÓN

COLABORA

EduCaixa

Universidad  
del País Vasco  
Euskal Herriko  
Unibertsitatea

Kultura  
Zientifikoko Katedra  
Cátedra  
Cultura Científica

fundación  
PROMAESTRO

GOBIERNO  
DE ARAGON

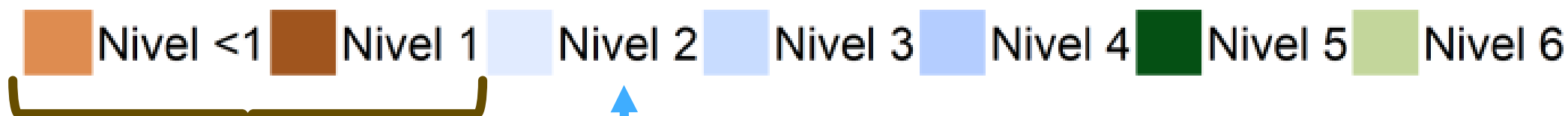
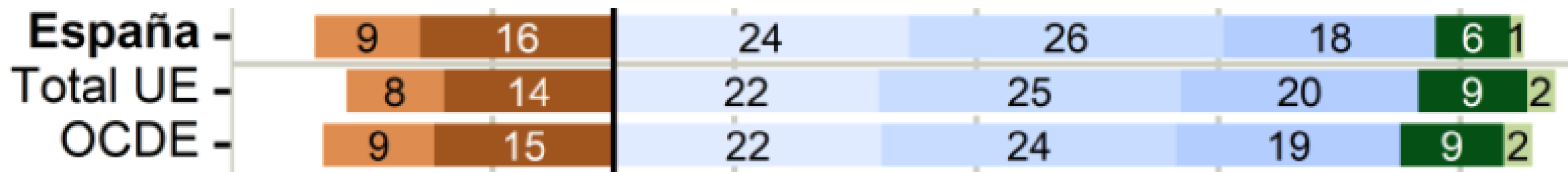
# LA DIFICULTAD DE ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS

## DIFERENCIA ENTRE PROBLEMA Y EJERCICIO EN MATEMÁTICAS

Si una persona reconoce inmediatamente los procedimientos necesarios para la resolución de una situación, entonces no es un **problema**, sino una tarea rutinaria o un **ejercicio** (Kantowski, 1980).

# LA DIFICULTAD DE ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS

## NIVELES DE RENDIMIENTO EN MATEMÁTICAS (PISA 2018)



- Estudiantes de bajo rendimiento
- No han alcanzado el nivel mínimo
- Estudiantes “en riesgo”

Nivel mínimo de competencia matemática al final de la ESO



# Niveles de rendimiento PISA y resolución de problemas

**Nivel 1.** Llevan a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.

**Nivel 2.** Utilizan algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales para resolver problemas.

...

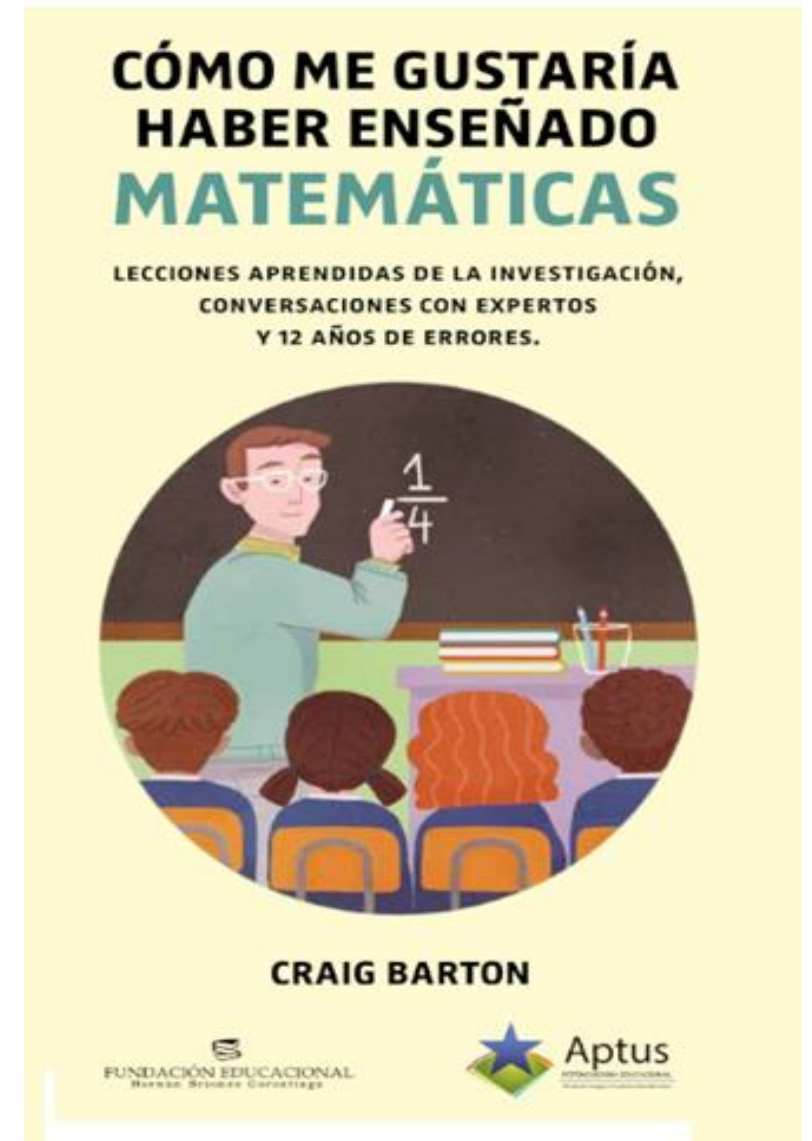
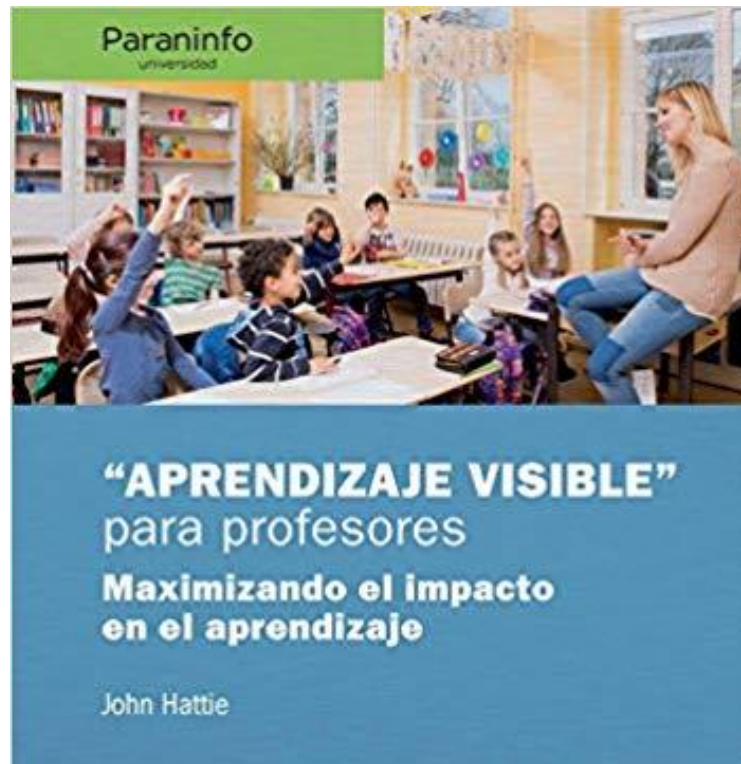
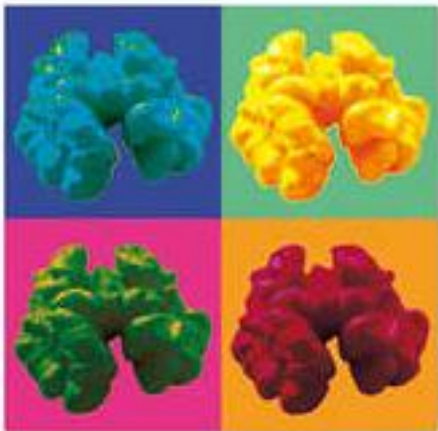
**Nivel 5.** Seleccionan, comparan y evalúan diferentes estrategias para la resolución de problemas, utilizando razonamientos y apoyándose en representaciones...

# HACIA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA BASADA EN EVIDENCIAS

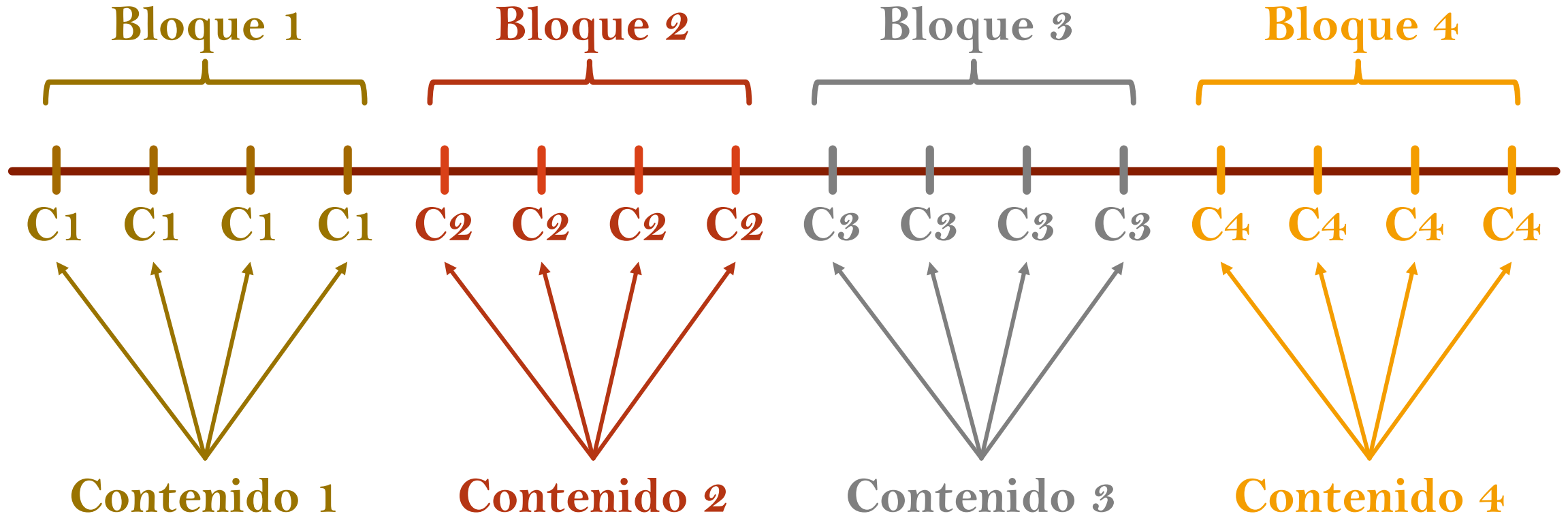
¿Cómo podemos utilizar el conocimiento científico para mejorar la enseñanza en el aula?

¿Por qué a los niños no les gusta ir a la escuela?

Daniel T. Willingham



# Práctica por bloques



En cada bloque, (1) estudiamos un contenido y (2) lo aplicamos a la resolución de un problema.

# Ejemplo de la práctica por bloques: El MCM

- La práctica por bloques convierte los problemas en ejercicios.
- Si sabes lo que tienes que hacer, entonces no es un problema.

**6** Calcula.

- |                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| a) mín.c.m. (12, 18) | b) mín.c.m. (21, 35)  |
| c) mín.c.m. (24, 36) | d) mín.c.m. (36, 40)  |
| e) mín.c.m. (72, 90) | f) mín.c.m. (90, 120) |

**7** Calcula.

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| a) mín.c.m. (4, 6, 9)    | b) mín.c.m. (6, 8, 9)     |
| c) mín.c.m. (12, 18, 30) | d) mín.c.m. (24, 28, 42)  |
| e) mín.c.m. (60, 72, 90) | f) mín.c.m. (50, 75, 100) |

**8** Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista. ¿A qué altura **coinciden** las cimas de ambas torres?

**9** Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han **coincido** ambos envíos.

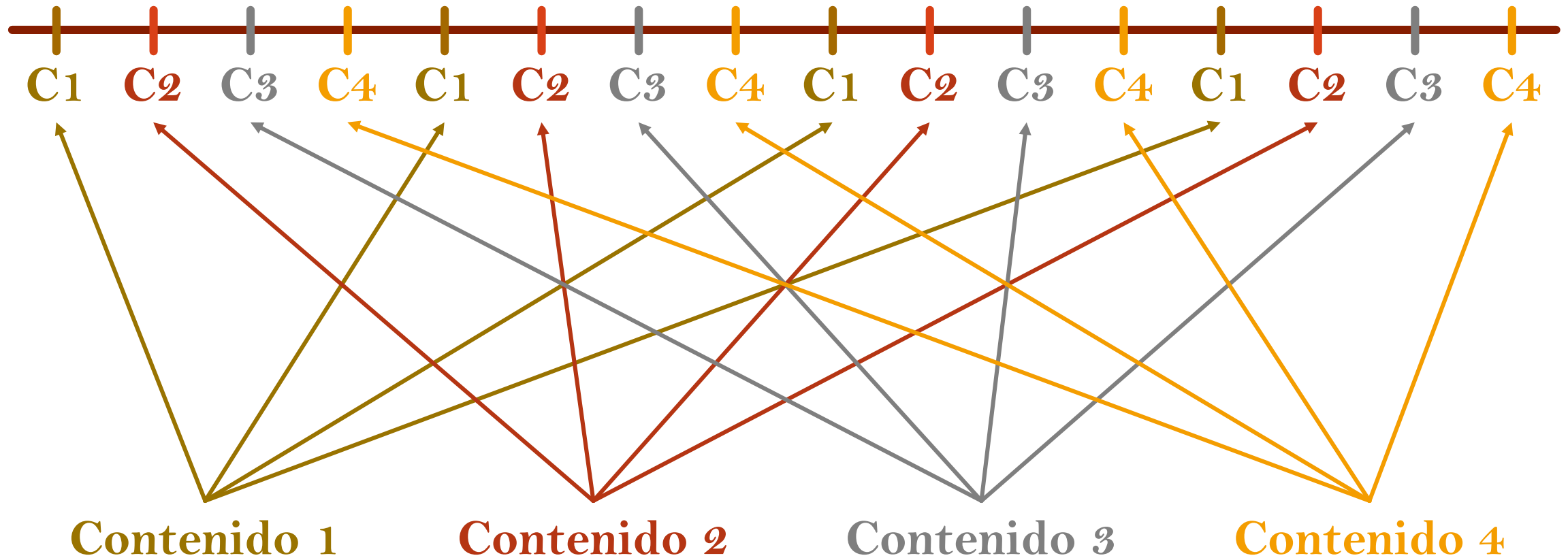
¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a **coincidir**?

**10** El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos.

Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a **coincidir**?

**Truco:** Si “coinciden”, es el MCM.

# Práctica intercalada (*interleaved*)



En la práctica intercalada, se rompe la asociación rígida entre procedimiento y el problema que se resuelve con el procedimiento.



# Práctica espaciada

El aprendizaje de un contenido matemático es mejor cuando la práctica relativa al contenido se presenta separada (espaciada en el tiempo) que cuando toda la práctica se presenta “de una vez”.

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
---	---	---	4 horas de estudio	<b>Examen de Matemáticas</b>
Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1 hora de estudio	1 hora	1 hora	1 hora	<b>Examen de Matemáticas</b>

# “HALLAZGOS SÓLIDOS” EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

COMITÉ DE EDUCACIÓN, SOCIEDAD MATEMÁTICA EUROPEA

Un hallazgo sólido:

(1) Es confiable, tiene poder explicativo, rigor, con múltiples fuentes de evidencia.

(2) Tiene un gran alcance o generalidad en diferentes ámbitos de las matemáticas, contextos de aprendizaje, países, sistemas educativos, culturas...

(3) Supone una contribución importante para la teoría y a la práctica del aula.

# 1. EL CONTRATO DIDÁCTICO

Los alumnos tienden a responder intentando cumplir con lo que piensan que el profesor espera de ellos más que cumplir con lo que pide el problema en sí.

La actividad matemática se empobrece. Parece que lo importante es adivinar lo que quiere el profesor y no desarrollar un verdadero pensamiento matemático.

## Ejemplo 1. La edad del capitán

**Problema:** En un barco hay 26 corderos y 10 cabras.  
¿Cuál es la edad del capitán?

**Respuesta (76 de 97 alumnos):**  $26 + 10 = 36$

IREM Grenoble, 1980

## Ejemplo 2

Estrategias de  
cálculo mental

$$\begin{array}{r} 328 \\ -47 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{+3} \begin{array}{r} 331 \\ -50 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{+50} \begin{array}{r} 381 \\ -100 \\ \hline \end{array} = 281$$

$$\text{a) } 875 - 379 = \overset{+21}{896} - \overset{+21}{400} = 496$$

$$\text{b) } 964 - 853 = 111$$

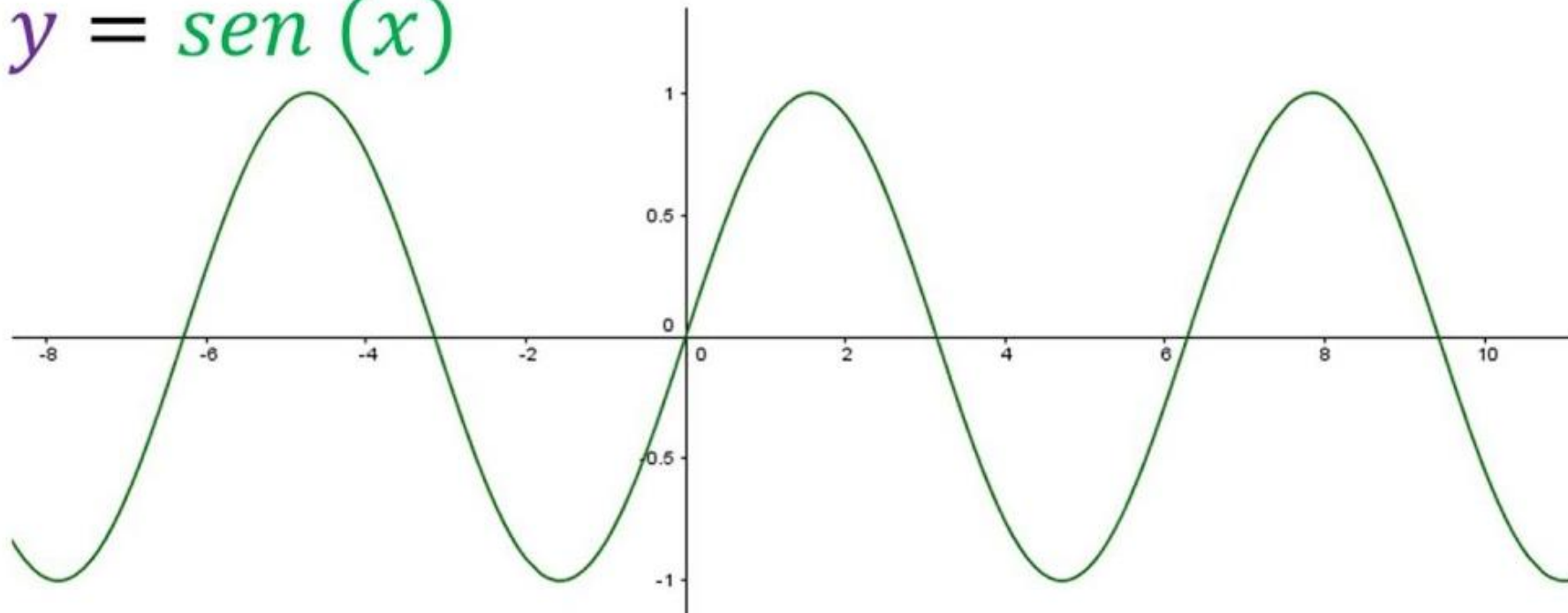
$$\text{c) } 999 - 111 = 888$$

$$\text{!!! } 999 - 111 = 1008 - 120 = 1088 - 200 = 888 \text{ !!!}$$

## Ejemplo 3

Encuentra  $x$  para que: (1)  $\text{sen}(x) = \frac{\pi}{3}$ ; (2)  $\text{sen}(x) = \frac{\pi}{2}$

$$y = \text{sen}(x)$$



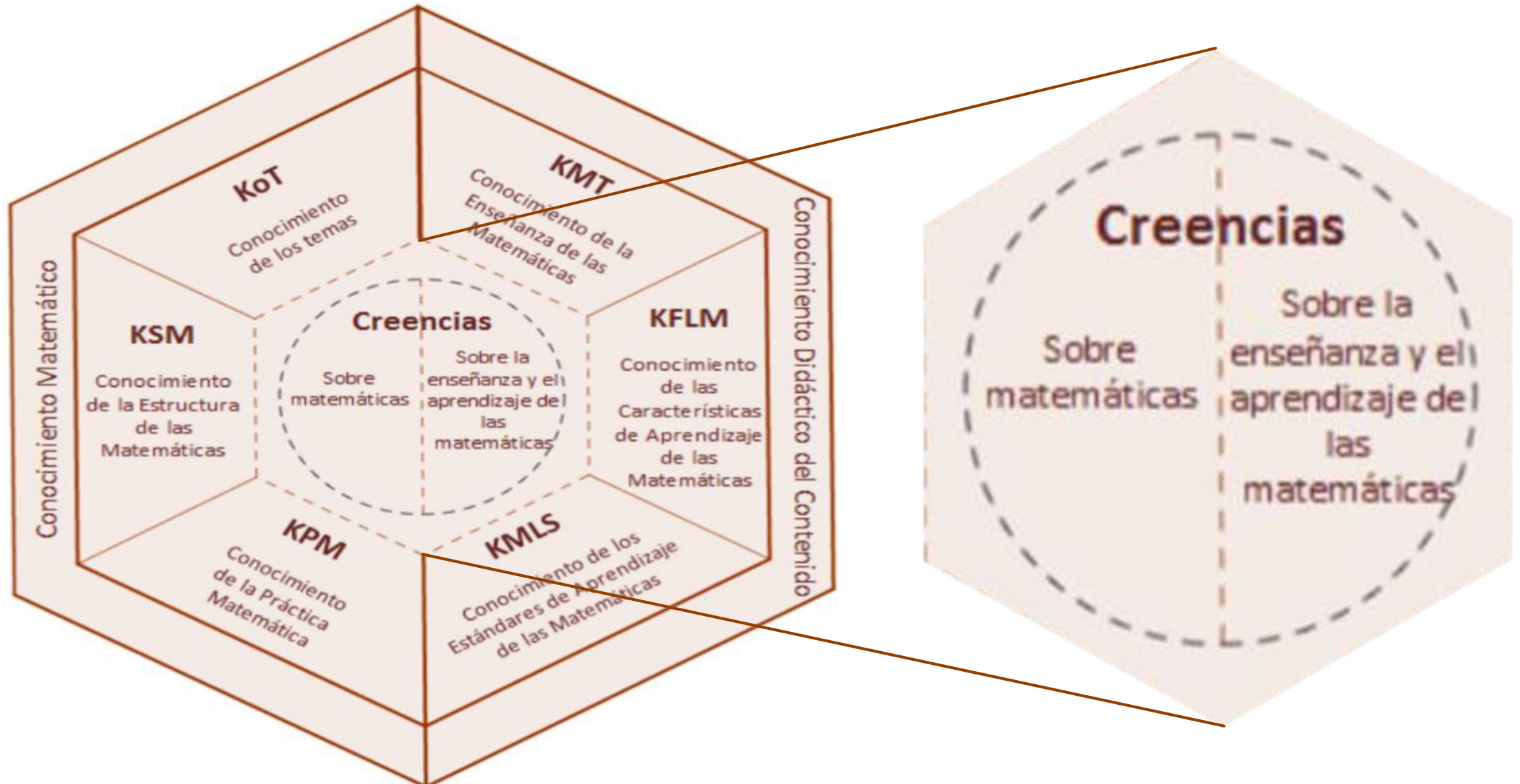
$$\frac{\pi}{3} \cong 1,05 > 1$$

$$\frac{\pi}{2} \cong 1,57 > 1$$

## 2. CREENCIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- En los años 80 hay un cambio curricular en EEUU.
- Las matemáticas se centran en la resolución de problemas.
- Este cambio fracasó.
- Algunas creencias de alumnos y profesores sobre las matemáticas son incompatibles con la resolución de problemas.
- Si no cambian las creencias sobre las matemáticas, es muy difícil mejorar la resolución de problemas.

# Papel de las creencias en la Educación Matemática





# Ejemplos de creencias sobre resolución de problemas

- Solo hay una manera de resolver correctamente cada problema: el método que el profesor acaba enseñar en clase (Schoenfeld, 1992).
- Los problemas deben entenderse “a la primera”, nada más leerlos (Woods, 1987).
- Los problemas son para aplicar reglas aprendidas. Por tanto se pueden resolver fácilmente en pocos pasos (Frank, 1988).
- La resolución de un problema se acaba al encontrar la solución (Callejo, 1994).
- “El resultado es más importante que el proceso. Si no se encuentra la solución, se ha fracasado (Callejo, 1994).

# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

(1) Basar la formación de maestras y maestros en los “hallazgos sólidos” de la investigación.

Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas (Vila y Callejo, 2004).



## Matemáticas para aprender a pensar

El papel de las creencias en la resolución de problemas

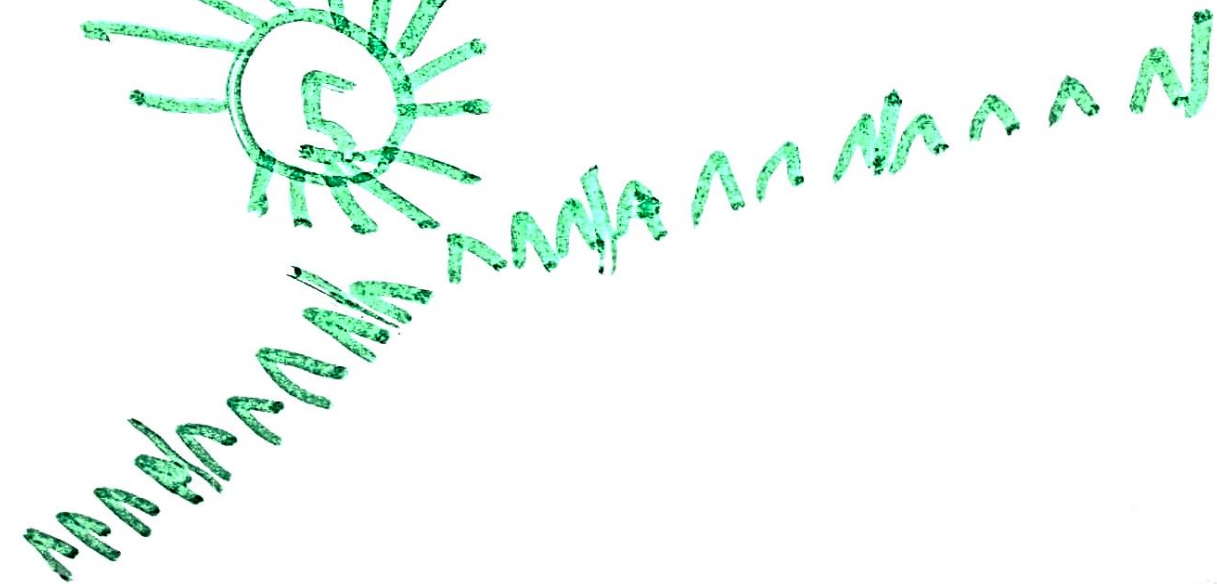
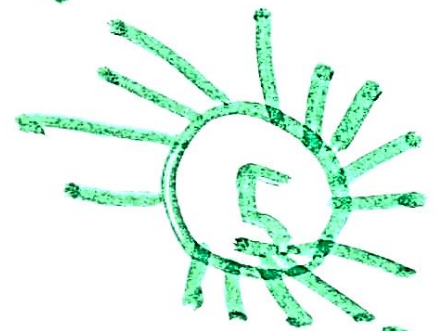
Antoni Vila Corts  
Ma. Luz Callejo de la Vega

narcea ediciones

# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

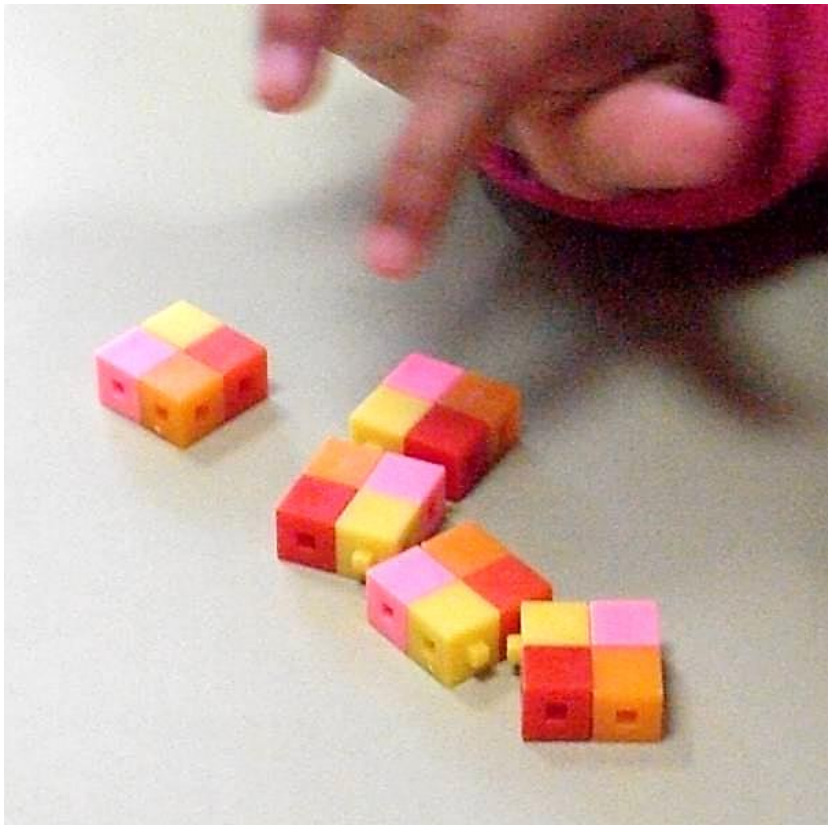
(2) Aplicar las ideas sobre práctica intercalada y espaciada, variando los tipos de problemas e intercalando problemas diferentes.

PROBLEMA N° 2. Si hay varios cuadraditos en la casa de los redonditos y en total hay 20 esquinitas. ¿Cuántos cuadraditos hay?



# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

Si hay varios cuadraditos en la casa de los redonditos, y en total hay 20 esquinitas, ¿Cuántos cuadraditos hay?



# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

El aumento de la práctica intercalada puede hacerse en distintos entornos de aprendizaje.



# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

- En Smartick, la práctica en resolución de problemas era intercalada.
- Hemos aumentado la práctica intercalada en los ejercicios.

Sesión diaria (15 minutos)

Práctica **intercalada** en resolución de problemas

Lección 7: Práctica de ejercicios **por bloques**.

Lección 8: Práctica de ejercicios **por bloques**.



Sesión diaria (15 minutos)

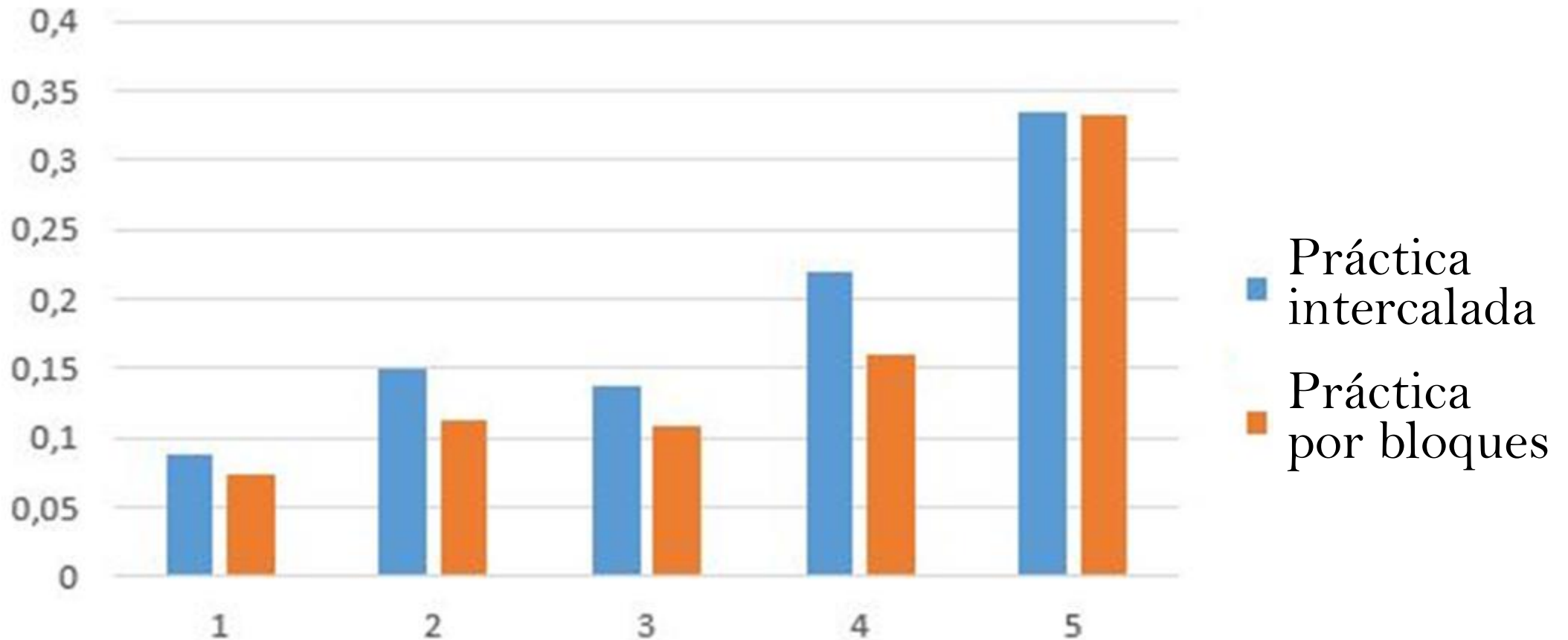
Práctica **intercalada** en resolución de problemas

Lección 7: Práctica de ejercicios **por bloques**.

Práctica **intercalada** de ejercicios (lecciones 3 a 6).

# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

El aumento de la práctica intercalada ha mejorado los resultados de los alumnos de Smartick (estudio experimental con 12614 alumnos).



# Y, ANTE ESTO, ¿QUÉ PODEMOS HACER EN EL AULA?

(3) Introducir, en los materiales curriculares, advertencias explícitas sobre los mitos (creencias) acerca del aprendizaje de las matemáticas.





# Mitos acerca del aprendizaje de las Matemáticas

- Mito 1.** Quien acaba primero es el mejor.
- Mito 2.** Se nace bueno o malo para Matemáticas.
- Mito 3.** Si cometo errores, significa que soy malo en Matemáticas.
- Mito 4.** Aprender Matemáticas es aplicar fórmulas y procedimientos.
- Mito 5.** En Matemáticas, todo (o nada) es practicar y memorizar.
- Mito 6.** Las Matemáticas se aprenden de forma individual.
- Mito 7.** Usar material concreto indica que el trabajo no es avanzado.
- Mito 8.** Lo más importante al resolver un problema es la respuesta.

# PRÁCTICA ESPACIADA E INTERCALADA: ¿POR QUÉ ES TAN DIFÍCIL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS?

CARLOS DE CASTRO, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID



## LAS PRUEBAS DE LA EDUCACIÓN

COLABORA

EduCaixa

Universidad  
del País Vasco  
Euskal Herriko  
Unibertsitatea

Kultura  
Zientifikoko Katedra  
Cátedra  
Cultura Científica

fundación  
PROMAESTRO

GOBIERNO  
DE ARAGON